SUP (MPSI, PCSI, PTSI)
SPÉ (MP, PC, PT, PSI)

Mercredi 21 Mai 1997 de 14h00 à 18h00

PREMIER PROBLÈME

PARTIE I : Étude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} \text{pour x dans }]-\frac{1}{2},0[\cup]0,+\infty[, & f(x) = \dfrac{\ln(1+2x)}{x} - 1 \\ & f(0) = 1 \end{cases}$$

1 - Donner le développement limité à l'ordre 1 de f(x) au voisinage de 0.

2 - a) Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.

b) Montrer que f est dérivable en 0 et donner f '(0).

c) Etudier les variations de f.
On montrera en particulier que f s'annule en un unique point α dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près (en expliquant comment elle est obtenue).

3 - Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité : 2 cm).

PARTIE II : Étude d'une suite convergeant vers α

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $u_0 > 0$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = \ln(1 + 2u_n) = g(u_n)$.

1 - Vérifier que u_n est bien défini pour tout n dans $\mathbb{N}$.

2 - On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Que vaut alors sa limite L ?

3 - a) On suppose que u_0 est dans l'intervalle $]0 , \alpha]$.
Montrer que, alors, pour tout n, u_n est dans l'intervalle $]0 , \alpha]$.
Puis montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et convergente vers α.

b) Montrer, de manière analogue, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers α si on suppose u_0 dans $]\alpha , +\infty[$.

4 - On pose $u_0 = 1$.

a) Montrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

b) Au vu de cette majoration, à partir de quel rang n est-on sûr que u_n représente une valeur approchée de α à 10^{-4} près ?

PARTIE III : Étude d'une primitive de f

On pose, pour x dans $]-\frac{1}{2}, +\infty[$, $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

1 - Etudier les variations de F (sans chercher à savoir, pour l'instant, si F(x) a une limite quand x tend vers $-\frac{1}{2}$ ou $+\infty$).

2 - Montrer que F(x) est équivalent à x quand x tend vers 0.

3 - Montrer que F(x) tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

4 - a) Montrer que, pour t dans $]-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}]$, on a : $\ln(1+2t) \geq \frac{-1}{\sqrt{1+2t}}$

puis : $f(t) \leq \frac{4}{\sqrt{1+2t}} - 1$

b) En déduire que l'expression $F(x) - F\left(-\frac{1}{4}\right)$ est minorée sur l'intervalle $]-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}]$

c) Prouver que F est prolongeable par continuité à droite en $-\frac{1}{2}$.

(on ne cherchera pas à calculer la valeur de F ainsi prolongée en ce point ; on la notera seulement L_1)

d) F, ainsi prolongée, est-elle alors dérivable à droite en $-\frac{1}{2}$?

5 - En admettant que $L_1 = -1{,}14$ à 10^{-2} près, donner l'allure de la courbe représentative de F (sur le même repère que celle de f), l'étude de la branche infinie n'étant pas demandée.

DEUXIÈME PROBLÈME

F est l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Questions préliminaires :

Soit ψ l'application, définie sur F, qui, à une fonction f, associe sa dérivée f ' :

a) Montrer que ψ est un endomorphisme de F.

b) Est-ce un automorphisme ?

On considère le sous-ensemble E de F des fonctions de la forme :

$x \mapsto P(x) \sin x + Q(x) \cos x$ où P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}_1[X]$

(c'est-à-dire de degré inférieur ou égal à 1 et à coefficients réels)

1 - Montrer que E est un sous-espace vectoriel de F, de base $\mathfrak{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$
où $f_1 : x \mapsto \sin x$; $f_2 : x \mapsto x \sin x$; $f_3 : x \mapsto \cos x$; $f_4 : x \mapsto x \cos x$

2 - D est la restriction de ψ à E.

a) Montrer que D est un endomorphisme de E et donner sa matrice M dans la base $\mathfrak{B}$.

b) Déterminer Ker(D). En déduire que D est une bijection de E sur E.

3 - λ est un réel, Id_E est l'application identique de E.

a) Déterminer, selon les valeurs de λ, le rang de $D^2 - \lambda Id_E$.

b) Déterminer une base et la dimension du noyau et de l'image de $D^2 + Id_E$.

c) En déduire que $D^4 + 2D^2 + Id_E$ est l'application nulle de E.

d) Retrouver alors que D est bijective et calculer D^{-1} en fonction de D.

4 - On note V le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ engendré par Id_E et D^2.

a) Vérifier que V est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

b) Soit G l'ensemble des éléments inversibles de V.
Montrer que G est l'ensemble des éléments de la forme : $\alpha Id_E + \beta D^2$ où $\alpha \neq \beta$.

c) G constitue-t-il un groupe pour la loi de composition des applications ?

5 - a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y = 0$.

b) Déterminer le noyau de $\psi^2 + Id_F$.

c) Montrer que le noyau de $(\psi^2 + Id_F)^2$ est E.
Puis montrer que E est exactement l'espace des solutions de l'équation différentielle :
$y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail